T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni

ROZWIĄZANIA PRÓBNYCH ZADAŃ
EGZAMINACYJNYCH

Wrocław, 10 czerwca 2004

ZADANIE 1.
a) W przestrzeni $C([0,1])$ wszystkich funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[0,1]$ określamy metrykę:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Czy jest to poprawnie zdefiniowana metryka?

ROZWIĄZANIE: Tak. Wartość jest zero wtedy i tylko wtedy gdy $f \equiv g$, nie zależy od kolejności f i g oraz spełniony jest warunek trójkąta:

$$\int_0^1 |f(x) - h(x)| dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)| dx =$$
$$\int_0^1 |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| dx \geq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

***

Czy ta sama definicja daje metrykę w zbiorze wszystkich funkcji ograniczonych i całkowalnych na $[0,1]$?

ROZWIĄZANIE: Nie. Dla funkcji nieciągłych całka różnicy może być zero, mimo że funkcje różnią się (na przykład w jednym punkcie).
***

b) W zbiorze wszystkich funkcji różniczkowalnych na $[0,1]$ spełniających warunek $f(a) = 0$ określamy metrykę:

$$d(f,g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x) - g'(x)|.$$

Czy jest to poprawnie zdefiniowana metryka?

ROZWIĄZANIE: Tak. Dwie funkcje o tej samej pochodnej mogą co prawda różnić się o stałą, ale skoro obie zerują się w a, to takie funkcje są sobie równe. Warunek trójkąta sprawdza się jak w poprzednim przykładzie.
***

Czy można ją stosować w zbiorze wszystkich funkcji różniczkowalnych na $[0,1]$ (bez warunku $f(a) = 0$)?

ROZWIĄZANIE: Nie. Wtedy funkcje różniące się o stałą miałyby odległość zero.
***

ZADANIE 2.
a) Niech (X,d) i (X',d') będą przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi. Wykaż, że produkt $X \times Y$ z metryką „maksimum":

$$d''((x,x'),(y,y')) = \max\{d(x,y), d'(x',y')\}$$

jest też przestrzenią ośrodkową.

ROZWIĄZANIE: Jeśli $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ośrodkiem w X i $\{a'_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ośrodkiem w X' to zbiór par $\{(a_n, a'_m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ jest ośrodkiem w $X \times X'$. Bowiem dla dowolnego $\epsilon > 0$ i $(x, x') \in X \times X'$ istnieje a_n ϵ-bliskie x w metryce d i a'_m ϵ-bliskie x' w metryce d'. Wtedy (a_n, a'_m) jest ϵ-bliskie (x, x') w metryce maksimum.
***

b) W powyższym zadaniu zastąp wszędzie słowo ,,ośrodkowa" słowem ,,zupełna".

ROZWIĄZANIE: Jeśli (x_n, x'_n) jest ciągiem podstawowym w $X \times X'$, to x_n jest ciągiem podstawowym w X a x'_n jest ciągiem podstawowym w X'. Skoro obie te przestrzenie są zupełne, to x_n ma granicę x w X i x'_n ma granicę x' w X'. Wtedy para (x, x') jest granicą ciągu (x_n, x'_n), bowiem

$$d''((x_n, x'_n), (x, x')) = \max\{d(x_n, x), d'(x'_n, x')\} \to 0.$$

***

ZADANIE 3.
Który ze wzorów jest prawdziwy dla dowolnego podzbioru F przestrzeni metrycznej?

$$\text{a)}\quad \mathrm{Int}(\overline{F}) = \overline{\mathrm{Int}(F)}, \qquad \text{b)}\quad (\mathrm{Int}(\overline{F}))^c = \overline{\mathrm{Int}(F^c)}.$$

ROZWIĄZANIE: Drugi. Pierwszy wzór ewidentnie zawodzi na przykład dla $F = Q$ w $\mathbb{R}$. Drugi wzór dowodzimy tak: Mamy $(\mathrm{Int}A)^c = \overline{A^c}$. Stosując to do $A = \overline{F}$ dostajemy $(\mathrm{Int}(\overline{F}))^c = \overline{(\overline{F}^c)}$. Ale $\overline{F}^c = \mathrm{Int}(F^c)$ i wstawienie tego kończy dowód.
***

ZADANIE 4.
Podaj przykład ciągu podwójnego $(a_{n,m})_{n\geq 1,\, m\geq 1}$ takiego, że obie granice iterowane

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m}) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m})$$

istnieją, ale nie są sobie równe.

ROZWIĄZANIE: Najprostszy to ciąg $a_{n,m}$ równe jeden dla $m \leq n$ i zero dla $m > n$. Jeśli przy ustalonym m zdążamy z n do nieskończoności, to od pewnego miejsca będą same jedynki, więc granica wyjdzie 1. Teraz ruszamy z m i dostajemy $\lim_m(\lim_n a_{n,m}) = 1$. Jeśli jednak przy ustalonym n zdążamy z m do nieskończoności, to od pewnego miejsca będą same zera, więc granica wyjdzie 0. Teraz ruszamy z n i dostajemy $\lim_n(\lim_m a_{n,m}) = 0$.
***

ZADANIE 5.
Wykaż, że każdy gęsty podzbiór przeliczalny prostej jest homeomorficzny ze zbiorem liczb wymiernych Q. (Na początek można udowodnić wersję łatwiejszą zadania, w której słowo ,,jest" zastępują słowa: ,,zawiera podzbiór").

ROZWIĄZANIE (od razu wersja pełna): Ponumerujmy nasz zbiór jako $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Nasz przyszły homeomorfizm ϕ określamy na razie na liczbach całkowitych przyporządkowując każdej z nich (dajmy na to liczbie m) punkt $\phi(m)$ z naszego zbioru wybrany ,,w pobliżu" tej liczby. Teraz pomiędzy każdą parą sąsiednich wybranych

punktów (czyli $\phi(m)$ i $\phi(m+1)$) wybieramy punkt a_n o najniższym możliwym indeksie n i jego to przypisujemy liczbie wymiernej $m+\frac{1}{2}$. Mamy już ϕ na liczbach całkowitych i połówkowych. Teraz wybieramy po dwa punkty o dwóch najniższych indeksach jakie występują pomiędzy każdą parą liczb $\phi(x)$ i $\phi(x+\frac{1}{2})$, gdzie x jest całkowita lub połówkowa i przypisujemy je liczbom $x+\frac{1}{6}$, $x+\frac{2}{6}$ zachowując ich porządek (a nie kolejność indeksów). W ten sposób załatwiamy ϕ na wszystkich liczbach wymiernych o mianowniku 6. Indukcyjnie określimy ϕ na liczbach wymiernych o mianownikach $k!$, czyli na całym Q. Ponieważ każdy punkt a_n będzie kiedyś tym o najmniejszym indeksie (najpóźniej w n-tym kroku, to ϕ jest NA. Jest też 1-1, bo żadnego a_n nie wybieramy dwa razy. Wreszcie ciągłość ϕ i ϕ^{-1} wynika z tego, że oba te odwzorowania są rosnące. Odwzorowanie rosnące może mieć nieciągłości tylko typu ,,luka" (granica lewostronna mniejsza od prawostronnej), ale skoro obraz jest gęsty w $\mathbb{R}$, to luki muszą być zerowe.
***

ZADANIE 6.
a) Czy istnieje odwzorowanie zbliżające odcinka $[a,b]$ ($a<b$) **na** siebie?

ROZWIĄZANIE: Nie. Punkty a i b byłyby obrazami punktów odległych o więcej niż $b-a$, a takich w $[a,b]$ nie ma.
***

b) To samo pytanie, gdzie zamiast odcinka jest dowolna przestrzeń metryczna zwarta niejednopunktowa.

ROZWIĄZANIE: Też nie. W każdym zbiorze zwatrym jest para punktów a, b odległa od siebie o maksimum odległości mędzy punktami tego zbioru. Dalej rozumujemy jak dla odcinka.
***

c) Podaj przykład odwzorowania zbliżającego półprostej $[0,\infty)$ **na** siebie, którego punktem stałym nie jest 0.

ROZWIĄZANIE: $f(x) = |\frac{1}{2}x - 1|$. Stała Lipschitza wynosi $\frac{1}{2}$. Punktem stałym jest $\frac{2}{3}$.
***

d) Rozważmy przekształcenie $\phi(f) = g$, gdzie

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + 1,$$

określone na zbiorze $C([0,\frac{7}{8}])$ funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[0,\frac{7}{8}]$. Czy i do jakiej granicy dążą iteracje $\phi^n(f)$ tego przekształcenia nałożone na dowolną funkcję początkową f?

ROZWIĄZANIE: Jest to odwzorowanie zbliżające (ze stałą $\frac{7}{8}$). Zatem wystarczy znaleźć punkt stały. Łatwo widać, że jest nim funkcja e^x.
***

ZADANIE 7.
a) Udowodnij, że jeśli $f: X \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym przestrzeni zwartej w siebie, to istnieje niepusty zbiór $Y \subset X$ taki, że $f(Y) = Y$ (tzn. f obcięte do Y przyjmuje wartości w Y i jest ,,na" Y).

ROZWIĄZANIE: Zbiorem tym jest przekrój

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X).$$

Jest to zbiór niepusty jako przekrój zstępujący zbiorów domkniętych w przestrzeni zwartej. Jej obrazem jest

$$f(Y) = f(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{n+1}(X) = \bigcap_{n=2}^{\infty} f^n(X),$$

ale ponieważ zbiory $f^n(X)$ maleją, więc brak pierwszego składnika nic nie zmienia i $f(Y) = Y$.
***

b) Czy to samo jest prawdą dla dowolnej przestrzeni zupełnej X?

ROZWIĄZANIE: Nie. Weżmy $X = [0, \infty)$ i $f(x) = x+1$. Żaden niepusty podzbiór Y nie odwzorowuje się NA siebie, bo liczby z przdziału $[\inf Y, \inf Y + 1)$ (a zawsze jest tam przynajmniej jeden element z Y) nie są obrazami liczb z Y.
***

ZADANIE 8.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech A, B będą podzbiorami wzajemnie homeomorficznymi (jako przestrzenie metryczne z metryką d).

c) Czy jeśli A jest rezydualny w X, to B też?

ROZWIĄZANIE: Nie. Weźmy $X = [0, \infty)$ i $A = [0, \infty)$, $B = [1, \infty)$. A i B są homeomorficzne, A jest oczywiście rezydualny w X, a B nawet nie jest gęsty w X.
***

d) Czy jeśli A jest I kategorii w X, to B też?

ROZWIĄZANIE: Nie. Niech X będzie sumą odcinka $[a, b]$ i osobnego punktu c. Zbiór $\{a\}$ jest nigdzie gęsty, więc I kategorii, zbiór $\{c\}$ jest otwarty, więc II kategorii. Oczywiście zbiory jednopunktowe są wzajemnie homeomorficzne.
***

Niech

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

gdzie zbiory A_n są parami homeomorficzne.

c) Czy któryś ze zbiórów A_n może być I kategorii?

ROZWIĄZANIE: Tak. Niech $X = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{0\}$ Jest to przestrzeń zupełna (nawet zwarta), jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów jednopunktowych (więc parami homoemorficznych), ale $\{0\}$ jest zbiorem nigdzie gęstym, więc I kategorii.
Całe to zadanie ma na celu uzmysłowić, że kategoria zbioru, czy jego rezydualność zależy od tego jak leży on w całej przestrzeni X, a nie od samej postaci zbioru (w przeciwieństwie na przykład do zwartości).
***

ZADANIE 9. *To zadanie dotyczy materiału, który dopiero pojawi się na wykładach.* Wykaż, że przestrzeni zwartej $[0, 1]^X$ (z topologią produktową) wszystkich funkcji o wartościach w $[0, 1]$ określonych na pewnym zbiorze nieskończonym X, zbiór $\{f : \inf_{x \in X} f(x) = 0\}$ jest gęsty i jest typu G_δ.

ROZWIĄZANIE: Ten zbór (oznaczmy go A) to $\{f : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists x) f(x) < \frac{1}{n}\}$ czyli

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{x \in X} \{f : f(x) \in [0, \tfrac{1}{n})\}.$$

Zbióry w ,,wąsach" są otwarte (wręcz bazowe) w topologii produktowej, ich suma teżjest otwarta. Na końcu mamy przeliczalny ich przekrój, więc całość jest typu G_δ. Zbiór A jest gęsty, bo każdy zbiór bazowy dopuszcza pełną swobodę wartości f w co najmniej jednym punkcie (tak naprawde to w nieskończenie wielu punktach; zbór X jest z założenia nieskończony, a w definicji zbioru bazowego nakłada się ograniczenia na wartości tylko w skończenie wielu punktach). Pewna funkcja z tego zbioru bazowego przyjmuje tam wartość 0. Zatem każdy zbiór bazowy zawiera funkcję która przyjmuje wartość zero, a więc należy do naszego zbioru A.
***

ZADANIE 10. *To zadanie dotyczy materiału, który dopiero pojawi się na wykładach.* Rozważmy ciąg funkcji $f_n \in [0,1]^{[0,1]}$, gdzie f_n jest funkcją łamaną łączącą punkty

$$(0,0),\ (\tfrac{1}{3^n},1),\ (\tfrac{2}{3^n},0),\ (\tfrac{3}{3^n},1),\ \dots\ (\tfrac{3^n-1}{3^n},0),\ (1,1).$$

Wykaż, że pomimo, iż rozważamy ciąg w przestrzeni zwartej (z topologią produktową), nie ma on podciągu zbieżnego. (Musi on mieć zbieżne podnety, ale żaden z nich nie jest ciągiem!)
Wsk. Funkcja graniczna byłaby I klasy Baire'a. Zbadaj jej wartości w punktach $\frac{k}{3^n}$ dla k parzystych i nieparzystych. Jaki wyjdzie zbiór punktów ciągłości tej funkcji?

ROZWIĄZANIE: Jak mówi wskazówka, funkcja graniczna f byłaby I klasy Baire'a. W punkcie $\frac{k}{3^m}$ dla k nieparzystego wszystkie funkcje f_n z indeksem $n \geq m$ przyjmują wartość 1 (bo $\frac{k}{3^m} = \frac{k3^{n-m}}{3^n}$ i licznik jest znowu nieparzysty). Zatem f też przyjmuje tam wartość 1. Podobnie dla k parzystego wyjdzie wartość 0. Ponieważ zbór liczb postaci $\frac{k}{3^m}$ z k parzystymi jest gęsty i analogiczny zbór z k nieparzystymi jest też gęsty, więc f jest nieciągła w każdym punkcie. Jest to sprzeczność z twierdzeniem mówiącym, że dla funkcji I klasy Baire'a zbiór punktów nieciągłości jest I kategorii.
***

Tomasz Downarowicz